
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЕ КОМПЛЕКСЫ И СИСТЕМЫ

УДК 621. 314.2

А.С. Серебряков, В.Л. Осокин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ В ТРАНСФОРМАТОРЕ С УЧЕТОМ ПОТЕРЬ В МАГНИТОПРОВОДЕ

Нижегородский государственный инженерно-экономический университет

На основании уравнений состояния предложена математическая модель электромагнитных процессов в трансформаторе с учетом потерь в магнитопроводе. Для учета потерь в сердечнике добавлена еще одна электрическая цепь, имеющая магнитную связь с первичной обмоткой трансформатора. Показано, что каждый реальный двухобмоточный трансформатор с учетом потерь в магнитопроводе есть трехобмоточный трансформатор. Электромагнитные процессы в обмотках трансформатора описываются уравнениями, составленными с учетом того, что, по принципу Ленца, ЭДС, индуцированная за счет изменения тока, имеет направление, препятствующее изменению тока, вызывающего эту ЭДС. Иными словами, положительное направление ЭДС самоиндукции направлено против положительного направления тока. Это отличает предложенную модель от моделей, принятых в литературе по электромеханике, и позволяет ввести единообразие в записи уравнений состояния для машин постоянного и переменного тока. Зависимость напряженности магнитного поля в сердечнике от индукции аппроксимирована с помощью гиперболического синуса. В MATHCAD исследованы переходные процессы при включении трансформатора под напряжение. Результаты исследования предложенной математической модели могут быть использованы при проектировании и эксплуатации интеллектуальных систем релейной защиты и автоматики силовых трансформаторов, питающих сложную переменную нагрузку. К таким трансформаторам можно отнести, например, тяговые трансформаторы электроподвижного состава железных дорог, электрифицированных на переменном токе.

Ключевые слова: магнитная цепь трансформатора, потери в магнитопроводе, потери на гистерезис и вихревые токи, поток рассеивания, ток намагничивания, трансформатор, холостой ход, электромагнитные процессы.

1. Введение

Уравнения состояния и математическая модель электромагнитных процессов в трансформаторе при отсутствии потерь в стали были рассмотрены в [1]. В реальном трансформаторе при перемагничивании сердечника, выполненного из тонких листов ферромагнитного материала, возникают потери, называемые потерями холостого хода. Поэтому намагничивание происходит по несовпадающим кривым, и образуется петля гистерезиса (рис. 1) [2-4].

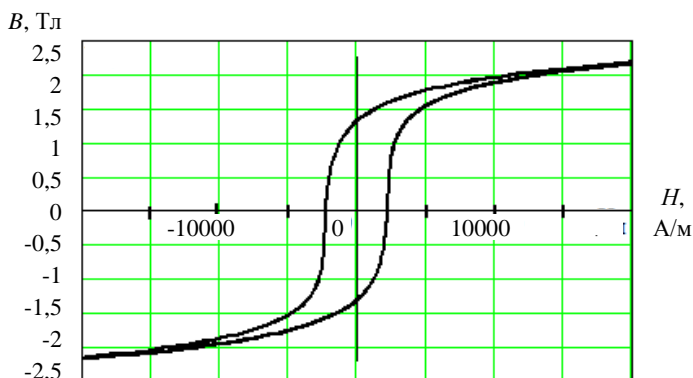


Рис. 1. Петля гистерезиса при перемагничивании ферромагнитного сердечника с частотой 50 Гц

Потери в сердечнике $P_{\text{СТ}}$ (магнитные потери или потери в стали) складываются из потерь на гистерезис $P_{\text{Г}}$ (перемагничивание) и потерь на вихревые токи $P_{\text{В}}$ (токи Фуко):

$$P_{\text{СТ}} = P_{\text{Г}} + P_{\text{В}}. \quad (1)$$

Эта энергия расходуется на перемагничивание и вихревые токи и преобразуется в тепло. Она прямо пропорциональна площади петли гистерезиса, которая снята при заданной частоте (динамическая петля гистерезиса). Ширина петли гистерезиса, а, следовательно, и ее площадь, растет с увеличением потерь в сердечнике. Потери на гистерезис обусловлены тем, что при перемагничивании стали для уменьшения остаточной индукции до нуля требуется затратить определенную величину магнитодвижущей силы $F = H_{\text{С}} \cdot l$, где $H_{\text{С}}$ – коэрцитивная сила, l – длина средней магнитной линии в магнитопроводе.

Мощность потерь на гистерезис:

$$P_{\Gamma} = \sigma_{\Gamma} \cdot f \cdot B_m^n \cdot G, \quad (2)$$

где σ_{Γ} – коэффициент гистерезиса (зависит от марки стали); f – частота колебаний магнитной индукции; B_m – амплитуда магнитной индукции; G – масса сердечника; n – коэффициент, зависящий от величины магнитной индукции ($n = 1,6$ при $B_m < 1$ Тл; $n = 2$ при $B_m > 1$ Тл).

Мощность потерь на вихревые токи:

$$P_{\text{В}} = \sigma_{\text{В}} \cdot f^2 \cdot B_m^2 \cdot G, \quad (3)$$

где $\sigma_{\text{В}}$ – коэффициент вихревых токов (зависит от марки стали и пропорционален квадрату толщины листа).

При $B_m > 1$ Тл, потери в стали:

$$P_{\text{СТ}} = \sigma_{\Gamma} \cdot f \cdot B_m^2 \cdot G + \sigma_{\text{В}} \cdot f^2 \cdot B_m^2 \cdot G. \quad (4)$$

Потери в стали пропорциональны квадрату магнитной индукции.

II. Материалы и методы

Согласно (4), мощность потерь на гистерезис P_{Γ} пропорциональна частоте, а мощность потерь на вихревые токи $P_{\text{В}}$ – квадрату частоты. Поэтому, если произвести замеры потерь в стали $P_{\text{СТ}}$ при одной и той же амплитуде магнитной индукции при двух разных частотах f_1 и f_2 , то можно условно разделить $P_{\text{СТ}}$ на P_{Γ} и $P_{\text{В}}$.

При частоте 50 Гц потери не разделяют, а для вычисления суммарных потерь пользуются выражением на основе (4):

$$P_{\text{СТ}} = \sigma_{\Gamma} \cdot f \cdot B_m^2 \cdot G + \sigma_{\text{В}} \cdot f^2 \cdot B_m^2 \cdot G = (\sigma_{\Gamma} \cdot f + \sigma_{\text{В}} \cdot f^2) \cdot B_m^2 \cdot G = P_{1/50} \cdot B_m^2 \cdot G, \quad (5)$$

где $P_{1/50}$ – удельные потери в стали при $B_m = 1$ Тл и $f = 50$ Гц, (Вт/кг).

Величина удельных потерь зависит от марки стали и в среднем составляют 0,5-3,1 Вт/кг. При $B_m = 1,7$ Тл, удельные потери лучших сортов стали составляют 1,05-1,1 Вт/кг. Для аморфных сталей эти потери в три-четыре раза меньше [5-7].

Следовательно, для учета потерь в сердечнике трансформатора при перемагничивании, необходимо сумму всех элементарных ЭДС в каждом листе ферромагнитного сердечника представить в виде одной ЭДС. Эта ЭДС наводится в отдельной обмотке, которая дополнительно вводится в

расчетную схему трансформатора и имеет магнитную связь с первичной обмоткой (рис. 2). Эта обмотка замыкается на сопротивление R_3 , потери в котором равны мощности потерь в ферромагнитном сердечнике [8]. Число витков в дополнительной обмотке w_3 можно взять равным 1, либо равным любому другому числу, но при этом необходимо подобрать соответствующие значения R_3 и L_3 .

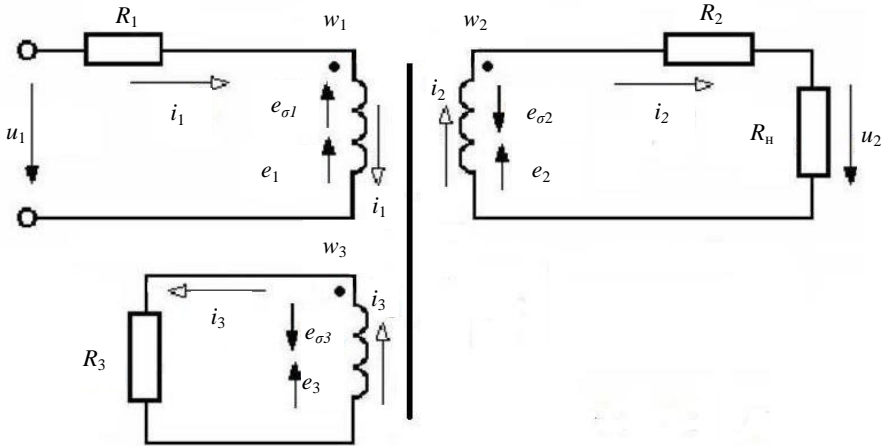


Рис. 2. Расчетная схема трансформатора с учетом потерь в магнитопроводе

Таким образом, реальный двухобмоточный трансформатор должен представляться как трехобмоточный.

III. Уравнения состояния и математическая модель трансформатора с учетом потерь в магнитопроводе

Уравнения, описывающие электромагнитные процессы в трансформаторе, расчетная схема которого изображена на рис. 2, имеют вид:

- для первичной обмотки w_1 :

$$R_1 \cdot i_1 + L_{\sigma 1} \cdot \frac{di_1}{dt} + w_1 \cdot \frac{d\Phi}{dt} = u_1. \quad (6)$$

- для вторичной обмотки w_2 :

$$R_2 \cdot i_2 + R_H \cdot i_2 + L_{\sigma 2} \cdot \frac{di_2}{dt} = w_2 \cdot \frac{d\Phi}{dt}. \quad (7)$$

- для дополнительной обмотки w_3 , учитывающей потери в сердечнике:

$$R_3 \cdot i_3 + L_{\sigma 3} \cdot \frac{di_3}{dt} = w_3 \cdot \frac{d\Phi}{dt}. \quad (8)$$

- для магнитной цепи по закону полного тока:

$$H \cdot l = \sum F = F_1 - F_2 - F_3 = w_1 \cdot i_1 - w_2 \cdot i_2 - w_3 \cdot i_3; \quad (9)$$

или, с учетом аппроксимации кривой намагничивания гиперболическим синусом:

$$H = \alpha \cdot \sinh(\beta \cdot B) = \alpha \cdot \sinh\left(\beta \cdot \frac{\Phi}{Q}\right); \quad (10)$$

$$\alpha \cdot l \cdot \sinh\left(\beta \cdot \frac{\Phi}{Q}\right) = w_1 \cdot i_1 - w_2 \cdot i_2 - w_3 \cdot i_3.$$

Продифференцируем уравнение (10):

$$\alpha \cdot l \cdot \frac{\beta}{Q} \cdot \cosh\left(\beta \cdot \frac{\Phi}{Q}\right) \cdot \frac{d\Phi}{dt} = w_1 \cdot \frac{di_1}{dt} - w_2 \cdot \frac{di_2}{dt} - w_3 \cdot \frac{di_3}{dt}. \quad (11)$$

Обозначим $A = \alpha \cdot l \cdot \frac{\beta}{Q}$ и $b = \frac{\beta}{Q}$. Тогда уравнение (11) примет вид:

$$A \cdot \cosh(b \cdot \Phi) \cdot \frac{d\Phi}{dt} = w_1 \cdot \frac{di_1}{dt} - w_2 \cdot \frac{di_2}{dt} - w_3 \cdot \frac{di_3}{dt}. \quad (12)$$

Запишем систему четырех дифференциальных уравнений (6,7,8) и (12) в канонической форме:

$$L_{\sigma 1} \cdot \frac{di_1}{dt} + w_1 \cdot \frac{d\Phi}{dt} = u_1 - R_1 \cdot i_1; \quad (13)$$

$$-L_{\sigma 2} \cdot \frac{di_2}{dt} + w_2 \cdot \frac{d\Phi}{dt} = (R_2 \cdot i_2 + R_H \cdot i_2); \quad (14)$$

$$-L_{\sigma 3} \cdot \frac{di_3}{dt} + w_3 \cdot \frac{d\Phi}{dt} = R_3 \cdot i_3; \quad (15)$$

$$w_1 \cdot \frac{di_1}{dt} - w_2 \cdot \frac{di_2}{dt} - w_3 \cdot \frac{di_3}{dt} - A \cdot \cosh(b \cdot \Phi) \cdot \frac{d\Phi}{dt} = 0. \quad (16)$$

Систему дифференциальных уравнений (13-16) представим в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} L_{\sigma 1} & 0 & 0 & w_1 \\ 0 & -L_{\sigma 2} & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & -L_{\sigma 3} & w_3 \\ w_1 & -w_2 & -w_3 & -A \cdot \cosh(b \cdot \Phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \\ \frac{di_3}{dt} \\ \frac{d\Phi}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - R_1 \cdot i_1 \\ (R_2 + R_H) \cdot i_2 \\ R_3 \cdot i_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Решая систему методом Крамера, определим производные искоемых величин. Уравнения в форме Коши для машинного решения примут вид:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad \frac{di_2}{dt} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \frac{di_3}{dt} = \frac{\Delta_3}{\Delta}; \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\Delta_4}{\Delta}, \quad (18)$$

где Δ – главный определитель системы; $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ – определители, которые получаются из главного определителя после замены соответствующего столбца столбцом свободных членов.

IV. Результаты исследования

На рис. 3 приведены результаты решение системы дифференциальных уравнений (18) в интегрированном пакете MATHCAD численным методом Рунге-Кутты четвертого порядка [9]. Решение системы уравнений (15) произведено согласно [1].

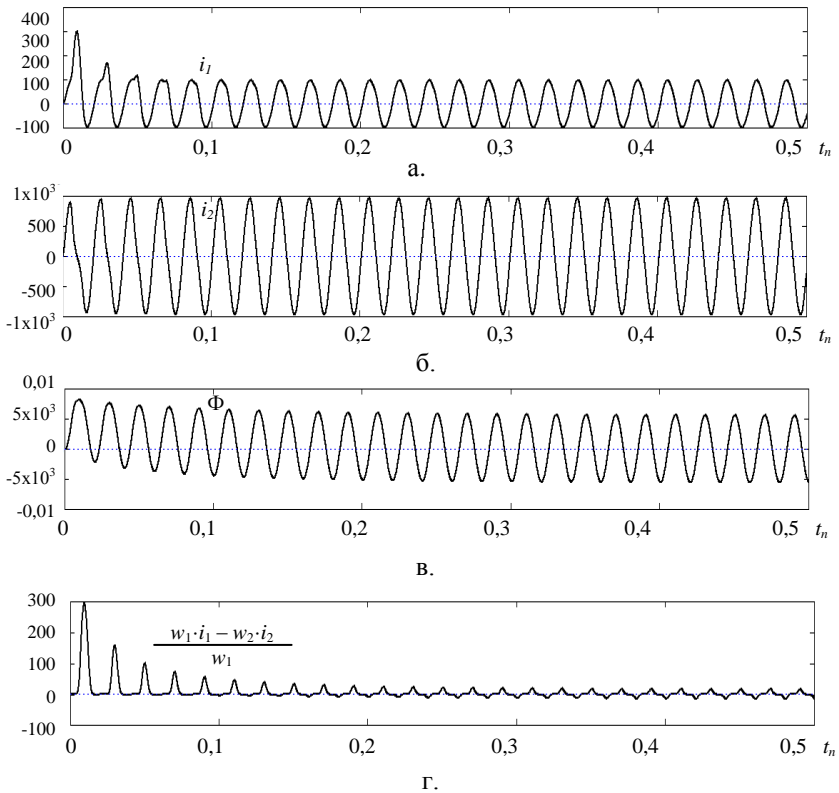


Рис. 3. Результаты решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (18) в интегрированном пакете MATHCAD

На рис. 4 показаны мгновенные значения тока намагничивания i_0 и магнитного потока Φ в сердечнике трансформатора. Несмотря на то, что кривые достигают максимального значения одновременно, кривая тока проходит через ноль раньше. Следовательно, ток опережает поток в сердечнике. Потери в стали приводят к тому, что в кривой тока появляется активная составляющая.

Кривая намагничивания $B = f(H)$, полученная на разработанной модели, имеет вид петли гистерезиса (рис. 1). Следовательно, из-за потерь на перемагничивание сердечника, изменение магнитной индукции (увеличение и уменьшение) происходит по несовпадающим кривым.

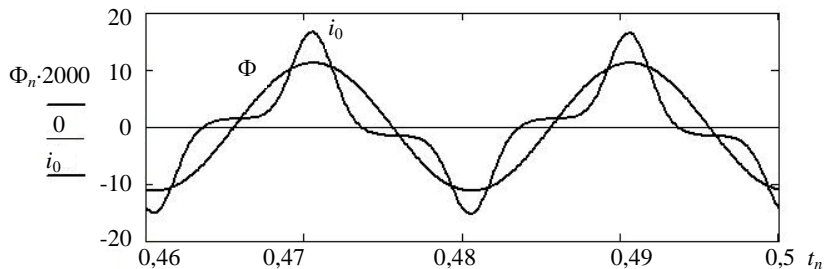


Рис. 4. Ток намагничивания i_0 и магнитный поток Φ в сердечнике трансформатора с учетом потерь в сердечнике

На рис. 5 показаны петли гистерезиса в процессе включения трансформатора. Видно, что во время переходного процесса сердечник намагничивается несимметрично, симметрия устанавливается постепенно в течение нескольких периодов. Полностью симметричное перемагничивание сердечника наступает только в конце переходного режима.

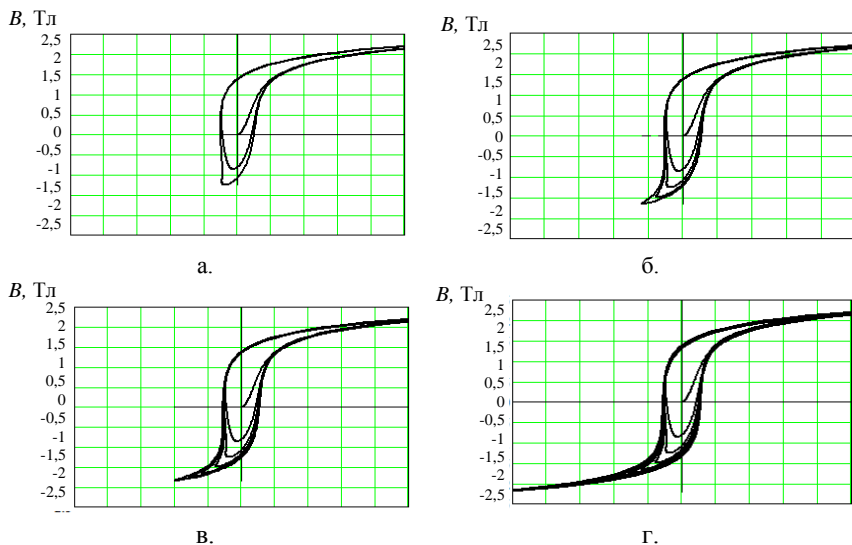


Рис. 5. Намагничивание сердечника трансформатора при его включении в моменты времени:
а) $t = 0,05$ с, б) $t = 0,09$ с, в) $t = 0,13$ с, г) $t = 0,5$ с

Установившееся значение тока намагничивания в реальных трансформаторах невелико и составляет несколько процентов от номинального тока трансформатора. Поэтому в установившемся режиме токи в обмотках и поток в сердечнике практически можно считать синусоидальными. Следовательно, для анализа установившихся процессов в однофазном трансформаторе можно воспользоваться комплексным методом, согласно которому несинусоидальный ток намагничивания представляется синусоидальным с действующим значением, аналогичным такому же у несинусоидальной кривой.

Комплексный метод позволяет отказаться от решения дифференциальных уравнений. Однако при расчете нестационарных процессов требуется решать нелинейные дифференциальные уравнения. В этом случае, особенно когда речь идет о разработке современных интеллектуальных систем релейной защиты и автоматики, следует использовать предложенную математическую модель трансформатора с учетом потерь в стали.

V. Заключение

На основании уравнений состояния предложена математическая модель электромагнитных процессов в трансформаторе с учетом потерь в магнитопроводе. С помощью предложенной модели в интегрированном пакете MATCAD исследованы переходные процессы при включении трансформатора под напряжение. Исследована динамика изменения семейства петель гистерезиса при включении трансформатора.

Результаты исследования предложенной математической модели могут быть использованы при проектировании и эксплуатации интеллектуальных систем релейной защиты и автоматики силовых трансформаторов, питающих сложную переменную нагрузку. К таким трансформаторам можно отнести, например, тяговые трансформаторы электроподвижного состава железных дорог, электрифицированных на переменном токе.

Результаты могут быть использованы при разработке ферромагнитных преобразователей параметров электрической энергии.

© Серебряков А.С., 2019

© Осокин В.Л., 2019

Библиографический список

- [1] Серебряков А.С., Осокин В.Л. Уравнения состояния и математическая модель электромагнитных процессов в трансформаторе // Интеллектуальная электротехника. 2019. № 1. С. 55-68.
- [2] Костенко М.П., Пиотровский Л.М. Электрические машины. В 2-х частях. Ч.1. Машины постоянного тока. Трансформаторы. Учеб. для студ. вузов. Изд. 3-е, перераб. Л.: Энергия, 1972. – 544 с.

- [3] Вольдек А.И., Попов В.В. Электрические машины. Введение в электромеханику. Машины постоянного тока и трансформаторы. Учеб. для вузов. СПб.: Питер, 2007. – 320 с.
- [4] Петров Г.Н. Электрические машины. В 3-х частях. Ч.1. Введение. Трансформаторы. Учеб. для вузов. М.: Энергии, 1974. – 240 с.
- [5] Беспалов В.Я., Котеленец Н.Ф. Электрические машины: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. М.: Академия, 2006. – 320 с.
- [6] Копылов И.П. Электрические машины. Учеб. для вузов. 6-е изд. М.: Высшая школа, 2009. – 607 с.
- [7] Лизунов С.Д., Лоханин А.К. Силовые трансформаторы. Справочная книга. М.: Энергоиздат, 2004. – 616 с.
- [8] Серебряков А.С. Трансформаторы: учеб. пособие. М.: Издательский дом МЭИ, 2013. – 360 с.
- [9] Серебряков А.С., Шумейко В.В. MATHCAD и решение задач электротехники. Учеб. пособ. для вузов ж.-д. транспорта. М.: Маршрут, 2005. – 240 с.

A.S. Serebryakov, V.L. Osokin

MATHEMATICAL MODEL OF ELECTROMAGNETIC PROCESSES IN TRANSFORMER WITH ACCOUNT LOSS IN MAGNETIC CORE

Nizhny Novgorod State University of Engineering and Economics
Knyaginino, Russia

Abstract. A mathematical model of electromagnetic processes in a transformer taking into account losses in the magnetic circuit is proposed on the basis of the equations of state. To account for losses in the core, one more electrical circuit has been added, which has a magnetic connection with the primary winding of the transformer. It is shown that each real two-winding transformer, taking into account losses in the magnetic circuit, is a three-winding transformer. Electromagnetic processes in the transformer windings are described by equations composed taking into account the fact that, according to the Lenz principle, an EMF induced by a change in current has a direction that prevents the change in current causing this EMF. The positive direction of the self-induced EMF is directed opposite the positive direction of the current, which distinguishes the proposed model from the one adopted in the literature and allows one to introduce uniformity in writing the equations of state for DC and AC machines. The dependence of the magnetic field strength in the core on induction is approximated using the hyperbolic sine. Transients processes when turning on the transformer has been investigated in MATHCAD. The results of the study of the proposed mathematical model can be used in the design and operation of intelligent relay protection and automation systems for power transformers that supply complex variable loads, for example, traction transformers of electric rolling stock of railways electrified with alternating current.

Keywords: electromagnetic processes, idle, leakage flux, losses in magnetic core, losses to hysteresis and eddy currents, magnetizing current, transformer, transformer magnetic circuit.

References

- [1] A.S. Serebryakov and V.L. Osokin, «State equations and mathematical model of electromagnetic processes in transformer», *Smart Electrical Engineering*, vol. 1, pp. 55-69, March 2019.
- [2] M.P. Kostenko and L.M. Piotrovsky, *Elektricheskiye mashiny. Part 1. Mashiny postoyannogo toka. Transformatory*. 3rd ed. St. Petersburg: Energy, 1972 (in Russian).
- [3] A.I. Voldek and V.V. Popov, *Elektricheskiye mashiny. Vvedeniye v elektromekhaniki. Mashiny postoyannogo toka i transformatory*. St. Petersburg: Piter, 2007 (in Russian).
- [4] G.N. Petrov, *Elektricheskiye mashiny. Part 1. Vvedeniye. Transformatory*. Moscow: Energia, 1974 (in Russian).
- [5] V.Ya. Bespalov and N.F. Kotelenets, *Elektricheskiye mashiny*. Moscow: Publishing Center «Academy», 2006 (in Russian).
- [6] I.P. Kopylov, *Elektricheskiye mashiny*. Moscow: Higher school, 2009, P. 607 (in Russian).
- [7] S.D. Lizunov and A.K. Lokhanin, *Silovyye transformatory. Spravochnaya kniga*. Moscow: Energoizdat, 2004 (in Russian).
- [8] A.S. Serebryakov, *Transformatory*. Moscow: Publishing House MEI, 2013 (in Russian).
- [9] A.S. Serebryakov and V.V. Shumeiko, *MATHCAD i resheniye zadach elektrotekhniki*. Moscow: Marshrute, 2005 (in Russian).